

Dziś wiemy już znacznie więcej

Ostatnie trzydzieści lat bardzo wzbogaciło naszą wiedzę o tym, jak funkcjonuje mózg człowieka i w jaki sposób się uczymy. Zbierzmy, w możliwie zwięzły sposób, najistotniejsze wskazówki, jak pracować z dziećmi, aby ich uczenie się matematyki było efektywne.

1. Zawsze zaczynamy od poznania naszych uczniów, ich matematycznej wiedzy i możliwości.

Gdy mówię o tym, np. podczas spotkań z nauczycielami nauczania początkowego, reakcja jest zawsze taka sama: *przecież to robimy, choćby badając ich gotowość szkolną*. Czy aby na pewno to to samo? Czy przy tej okazji sprawdzamy np.

- zakres liczb, którymi już swobodnie operują dzieci?
- czy i jakie liczby potrafią zapisać symbolicznie?
- czy i w jakim zakresie potrafią te liczby dodawać i odejmować?
- na ile mają rozwiniętą wyobraźnię przestrzenną?
- czy i jakie intuicje systemu dziesiętnego dotychczas rozwinęły?
- ...

Dzieci uczą się od początku swojego życia, obserwując otoczenie, działając w nim, stawiając pytania, rozmawiając z dorosłymi i rówieśnikami. Podejmując wiele różnorodnych prób, robiąc błędy, korygując je i w końcu odnosząc sukces. Dziecko przychodzi do szkoły bogate w różne doświadczenia. Nikt nie dziwi się, że pierwszoklasiści budują poprawne zdania, ciekawie opowiadają, prowadzą dialog, wiedzą, że słowa można zapisać, że zapisy można przeczytać. Natomiast rzadko uświadamiamy sobie, że sześciolatki i siedmiolatki mają też za sobą wiele doświadczeń matematycznych. A przecież w swoim otoczeniu niejednokrotnie zetknęły się z zapisem liczb, i to znacznie większych od 10, bawiły się piłkami i klockami, czyli eksperymentowały z bryłami geometrycznymi, towarzyszyły innym podczas robienia zakupów lub same kupowały, posługując się pieniędzmi i odczytując podane ceny.

Zgodnie z polską tradycją edukacyjną badając dzieci „na starcie” sprawdzamy, czy potrafią robić to, co dorośli (wiele lat temu!) uznali za niezbędne dla „uczenia się na sposób szkolny”, czyli czy pokonały pewien „próg”, czy raczej progi. Zupełnie nas, natomiast, przy tej okazji nie interesuje, jaki jest faktyczny stan ich wiedzy, co już potrafią zrobić, na czym w przyszłości możemy razem budować.

Jest jeden dodatkowy kłopot: dzisiejsza nauka dobitnie pokazuje, że nie ma czegoś takiego, jak „nauka na sposób szkolny”.

Podobnie jest na innych etapach kształcenia – zazwyczaj sprawdzamy pewne, naszym zdaniem niezbędne, minimum, a nie faktyczny stan wiedzy uczniów. Wystarczy wspomnieć nieśmiertelne: *muszą umieć mnożyć, reszty już ich nauczę* nauczycieli matematyki w klasach 4-6. A to dlatego, że – zgodnie z tradycją – mamy nawyk „ściągnięcia” wszystkich uczniów do poziomu tych „najsłabszych”. W efekcie, dzieci, które potrafią w pamięci dodawać spore liczby poznają w szkole monografię liczby 2, 3, 4 ..., a dzieci płynnie czytające utrwalają sylabizowanie. **Nuda i monotonia szkoda nie tylko motywacji, szkoda także mózgowi i upośledzają jego funkcjonowanie¹.**

Dziś wiemy, m.in. dzięki wieloletnim badaniom sposobu myślenia małych dzieci², że ich możliwości poznawcze oraz ich wiedza nieformalna, będąca efektem nieustannego eksperymentowania z otaczającą rzeczywistością przez kilka początkowych lat życia są zdecydowanie większe niż dawniej sądzono. To w tym okresie życia mózg człowieka pracuje najbardziej intensywnie i dokonuje mnóstwa samodzielnych ważnych odkryć.

Spróbujmy więc inaczej rozpocząć naszą pracę z uczniami: porozmawiajmy z nimi, postawmy przed nimi możliwie różnorodne – zarówno co do tematyki, jak i poziomu trudności – zadania, które faktycznie pomogą sprawdzić, co już wiedzą i jak sobie radzą w różnych, także nowych dla nich sytuacjach. **Dzięki uzyskanej w ten sposób wiedzy będziemy mogli stworzyć im lepsze warunki do dalszego rozwoju, a to właśnie powinno być podstawowym zadaniem dobrze funkcjonującej szkoły.**

2. Pozwólmy uczniom mówić i pytać, zachęcajmy je do rozmawiania o matematyce.

W naszej świadomości, w tym także w świadomości wielu dyrektorów szkół, dominuje taki oto paradygmat dobrej lekcji, zwłaszcza lekcji matematyki: w sali panuje cisza, uczniowie siedzą w ławkach pochyleni nad podręcznikami i zeszytami, bezbłędnie rozwiązując kolejne zadawane przez nauczyciela zadania, od czasu do czasu któryś uczeń podchodzi do tablicy i prezentuje poprawne rozwiązanie. I mamy kolejny kłopot – jest to dokładna negacja warunków, w jakich faktycznie skutecznie się uczymy.

Dziś już wiadomo³, że uczymy się matematyki tylko wtedy, gdy o niej rozmawiamy, gdy dyskutujemy, wzajemnie się przekonujemy, przytaczamy argumenty, formułujemy pytania i

¹ Por. M. Żylińska, *Neurodydaktyka. Nauczanie i uczenie się przyjazne mózgowi*. Wyd. UMK, Toruń 2013.

² Por. A. Gopnik i in., *Naukowiec w kołysce*. Media Rodzina, Poznań 2004.

³ A. Sfard, *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. CUP, 2010.

wspólnie szukamy na nie odpowiedzi, wzajemnie się słuchamy i wzajemnie się wspieramy w pokonywaniu trudności.

Gdy opowiadamy o tym co zauważyliśmy, albo czego nie rozumiemy, w naturalny sposób jesteśmy zmuszeni do bardziej precyzyjnego formułowania swoich myśli, do lepszego i bardziej szczegółowego przedstawienia swojego odkrycia czy pojawiającej się trudności, do szukania nowych słów i nowych argumentów, do eksponowania zauważonych związków lub ich braku. Jakże często w takiej właśnie sytuacji nagle sobie uświadamiamy coś, co nam dotychczas umykało, a jest ważne dla zrozumienia(!) omawianej kwestii. Zaczynamy lepiej, głębiej rozumieć to, o czym rozmawiamy.

Matematyki można uczyć (i się jej uczyć) w dwojaki sposób⁴:

- na poziomie *rozumienia instrumentalnego* (algorytmicznego) – uczeń wie, jaki schemat w danej sytuacji należy zastosować;
- na poziomie *rozumienia relacyjnego* – uczeń dostrzega związki między poznawanymi pojęciami i rozumie, dlaczego stosowane przez niego procedury funkcjonują w taki, a nie inny sposób.

Rozumienie instrumentalne pozwala uczniom na mniej lub bardziej bezpieczne radzenie sobie z typowymi, raczej prostymi i schematycznymi, zadaniami. Rozumienie relacyjne z kolei pozwala im budować i modyfikować strukturę ich wiedzy matematycznej, co owocuje także umiejętnością stosowania tej wiedzy w różnych, w tym nowych, sytuacjach. Matematykę trzeba poznawać relacyjnie, inaczej staje się ona jedynie nudnym zestawem reguł i schematów zapamiętanych dzięki monotonnemu praco i czasochłonnemu utrwalaniu.

Dyskutujmy zatem o matematyce z uczniami i zachęcajmy ich do dyskusji z sobą, bo to najprostszy i najbardziej skuteczny sposób na to, aby faktycznie rozumieli, czego się uczą i aby efektywnie się uczyli!

I abyśmy ich i ich wiedzę lepiej poznali. Właśnie słuchając uczniów jesteśmy w stanie najwięcej się o nich dowiedzieć – o ich sposobie myślenia, a ich wiedzy czy brakach w niej, o ich możliwościach i edukacyjnych potrzebach.

3. Zachęcajmy uczniów do wspólnej pracy i pozwólmy im uczyć się od siebie.

Najbardziej naturalną okazją do rozmów wspierających uczenie się jest wspólna praca i wspólne pokonywanie trudności, jak najczęściej więc organizujemy pracę w grupach.

⁴ R. R. Skemp, *Relational understanding and instrumental understanding*, „Mathematics Teaching” 1976, nr 77.

Zacznijmy od pracy w parach – jest to wariant najprostszy i dla nas (zwłaszcza organizacyjnie) i dla uczniów. Bardzo dobrą okazją do stopniowego opanowywania sztuki komunikacji i wspólnej pracy są gry dydaktyczne – sięgajmy więc jak najczęściej po dwuosobowe gry planszowe.

Wygodnym, również z praktycznego punktu widzenia, rozwiązaniem są także grupy trzyosobowe – wprowadzenie trzeciej osoby wzbogaca strukturę grupy i zwiększa liczbę wzajemnych interakcji, zachowując łatwość oglądu sposobu jej funkcjonowania. W takich grupach np. wygodnie rozwiązuje się trudniejsze złożone zadania czy problemy matematyczne.

Stopniowo, w miarę nabywania przez uczniów wprawy we wspólnej pracy, możemy organizować różnorodne działania w większych grupach.

Możemy tworzyć grupy o podobnym poziomie czy typie umiejętności matematycznych i różnicować zadania stawiane poszczególnym grupom, dobierając je do możliwości i potrzeb ich członków. Dzięki temu uczniowie będą mogli w tym samym czasie badać inne pojęcia czy rozwijać inne umiejętności, albo te same, ale na różnych poziomach trudności.

Możemy także dobierać zespoły o zróżnicowanych umiejętnościach i proponować zadania złożone, które pozwolą podczas wspólnego ich rozwiązywania na wykorzystanie możliwości wszystkich dzieci. Współpracując w grupie dzieci będą szukały różnych strategii postępowania, dyskutując, argumentując, przekonując siebie nawzajem; będą wspierać się w wychwytywaniu i poprawianiu błędów, będą odwoływać się do różnych narzędzi i reprezentacji – a więc będą stanowiły dla siebie stymulujące do rozwoju środowisko społeczne.

Nie zrażajmy się początkowymi trudnościami, bo korzyści, jakie przyniesie nam ich przezwyciężenie będą ogromne – zarówno dla dzieci, jak i dla nas. Praca w grupach pozwoli uczniom na bezpieczną rozmowę, na uczenie się od siebie, na rozwijanie się w swoim tempie, na radość ze wspólnych sukcesów i naukę ponoszenia ewentualnych porażek (bo i takie będą się zdarzać, a w grupie zawsze łatwiej sobie z nimi poradzić). Obserwowanie współpracujących dzieci oraz efektów ich wspólnych wysiłków da nam dodatkowe informacje na temat tkwiącego w nich potencjału, ich różnorodnych umiejętności – nie tylko matematycznych, ale też i społecznych.

Warto sięgać po pracę w grupach także dlatego, że jest to świetne przygotowanie do funkcjonowania w różnych grupach społecznych – w takich, w których uczniowie znajdą się w najbliższej przyszłości i w takich, w jakich znajdą się w dorosłym życiu. Jednak miejmy

świadomość, że **praca w grupach powinna często być obecna na lekcjach matematyki przede wszystkim dlatego, że służy uczeniu się matematyki.**

4. Stawiamy przed uczniami wyzwania na miarę ich możliwości i potrzeb.

Uczymy się tylko wtedy, gdy jesteśmy aktywni intelektualnie. Zależność jest bardzo prosta – im jesteśmy bardziej intelektualnie i emocjonalnie zaangażowani w proces uczenia się, tym jest on bardziej efektywny. To kolejna niepodważalna prawidłowość, która nie ma, niestety, żadnego przełożenia na naszą szkolną codzienność.

Jak pokazują badania⁵, podczas czterdziestopięciominutowych zajęć z edukacji matematycznej pod koniec klasy trzeciej uczniowie są aktywni intelektualnie średnio przez około 5 sekund. Warto te dane jeszcze raz zestawić: 5 sekund na 45 minut zajęć. A co robią przez resztę czasu? Zazwyczaj utrwalają (np. wykonując serię podobnych przykładów) kolejne podawane przez nauczycieli schematy postępowania służące rozwiązywaniu różnych typów zadań. Na innych poziomach edukacji nie jest lepiej – dominującą cechą charakteryzującą ucznia na lekcji matematyki jest pasywność, niekiedy wymuszona. To efekt bardzo silnego oddziaływania tradycji edukacyjnej, zgodnie z którą uczeń (i to niezależnie od swojego wieku) nie jest w stanie niczego sam „z matematyki” wymyślić, zatem dorośli – rodzice, nauczyciele, autorzy podręczników szkolnych ... – muszą go w tym wyręczyć.

Wspominałem już o tym, że rzeczywistość jest zupełnie inna – dzieci w kilku początkowych latach swojego życia i konsekwentnego badania otaczającego świata dokonują wielu fundamentalnych odkryć, także dotyczących matematyki. Znaczna ich część rozpoczynając naukę szkolną, operuje swobodnie liczbami, potrafi je „po swojemu” dodawać i odejmować, zna ich zapis symboliczny ... I, co ważne, chce tę wiedzę poszerzać. Żeby to jednak było możliwe uczniowie muszą dostawać znacznie trudniejsze zadania niż te, które głównie oferuje im nasza szkoła. Powtarzając za L. Wygotskim, człowiek uczy się wówczas, gdy dostaje zadania ze *strefy swojego najbliższego rozwoju* – zatem takie, którego schematu rozwiązania nie zna, ale jest w stanie, współpracując z innymi, pokonać powstałą trudność i je rozwiązać. To kolejny argument za tym, jak ogromnie istotne dla matematycznego rozwoju dzieci są:

- poznanie ich faktycznych możliwości przez nauczyciela
- współpraca z innymi
- oraz jak najczęstsze rozmawianie o matematyce.

⁵ M. Dąbrowski, *(Za) trudne, bo trzeba myśleć?* IBE, Warszawa 2013.

Możliwości uczniów są znacznie większe niż nam się wydaje, ich potrzeby rozwojowe – jeśli chodzi o wyzwania intelektualne – także. **Uwierzmy w dzieci i stawiajmy przed nimi możliwe systematycznie wyzwania motywujące do rzeczywistego intelektualnego rozwoju, głównie dzięki poszukiwaniu własnych(!) sposobów pokonywania trudności.** Efekty tej działalności, jak pokazują doświadczenia nauczycieli, którzy zmienili swój styl pracy, przyjdą bardzo szybko.

5. Pozwólmy uczniom budować i stosować własne strategie.

Wiele razy prowadziłem z nauczycielami warsztaty na temat dodawania i odejmowania w pamięci. Za każdym razem, gdy przychodziło do zaprezentowania sposobu, w jaki poszczególni uczestnicy wykonali w pamięci zapisane na tablicy obliczenie, np. odejmowanie $83 - 38$, pojawiała się długa lista zastosowanych metod. Nic w tym dziwnego, gdyż każde zadanie można rozwiązać na wiele różnych i równie dobrych(!) sposobów, a budowanie własnych strategii jest jednym z ważniejszych przejawów myślenia.

My dorośli mamy różnorodne sposoby jak najszybszego (czyli jak najwygodniejszego dla nas) dochodzenia do wyniku obliczenia, tymczasem w szkole zazwyczaj pokazujemy dzieciom tę jedną jedynie słuszną metodę. Dokładnie ten sam zabieg powtarzamy przy okazji rozwiązywania zadań tekstowych czy w każdym innym obszarze tematycznym.

Czemu to służy? Na pewno nie rozwojowi uczniów i nie matematyce. Zatem:

- Spróbujmy zrezygnować z tradycji podawania wszystkim uczniom tych samych gotowych sposobów rozwiązywania zadań oraz utrwalania ich za pomocą serii podobnych przykładów, a nasze działania będą miały większy walor kształcący i będą bardziej skuteczne, a równocześnie będą motywowały uczniów do uczenia się matematyki i rozwijały ich naturalną pomysłowość.
- Jak najczęściej pytajmy ich, jak by sami rozwiązali dane zadanie, zachęcajmy do samodzielnego poszukiwania metod, do opowiadania o nich, do wspólnego badania ich skuteczności, a ich wiedza będzie zdecydowanie bogatsza, podobnie jak nasza wiedza o ich możliwościach.
- Akceptujmy różne sposoby dochodzenia do celu, bo każde matematyczne zadanie można rozwiązać na wiele różnych sposobów i nie ma sposobu najlepszego dla wszystkich, a uczniowie staną się aktywnymi uczestnikami i współreżyserami wydarzeń na lekcji.
- Nagradzajmy uczniów za oryginalne pomysły, wyrażając uznanie dla ich matematycznej zaradności, a okaże się, że bardzo wielu z nich potrafi samodzielnie pokonywać trudności i zaskakiwać nas swoją pomysłowością i poziomem matematycznej wiedzy.

- Pozwalajmy im na swobodne i wygodne dla siebie notowanie swoich rozwiązań, bo jednym z zasadniczych zadań notacji matematycznej jest ułatwienie życia osobie, która ją stosuje. Zaowocuje to stopniowo coraz lepszym rozumieniem sensu notacji matematycznej.
- Zachęcajmy uczniów do posługiwania się różnymi narzędziami: żetonami, rysunkiem, miarkami, planszą stu liczb, innymi planszami, ... bo zwiększy to ich możliwości poznawcze i nauczy budować różne reprezentacje obiektów matematycznych i posługiwać się nimi.

I cieszymy się z postępów uczniów, bo zainteresowanie przedmiotem i motywację może budować tylko ten nauczyciel, który sam jest zainteresowany i zmotywowany.

6. Pozwólmy uczniom na błędy.

Naturalną konsekwencją podejmowania wyzwań, poszukiwania rozwiązań i samodzielnego budowania strategii jest popełnianie błędów. Specjalnie użyłem tego rozpowszechnionego w naszym kraju zwrotu, którego zazwyczaj staram się konsekwentnie unikać: *uczeń popełnił błąd*, tak jak *przestępca popełnił przestępstwo*. Dlaczego popełnił, a nie zwyczajnie: zrobił? Ponieważ w naszej tradycji edukacyjnej błędy są bardzo niemile widziane. Jakiś czas temu czytałem uwagi obserwatora z oglądanej w szkole lekcji matematyki, ich podsumowanie brzmiało mniej więcej tak: *Podczas tej lekcji uczniowie rozwiązywali bardzo dużo zadań i wszyscy te zadania rozwiązywali dobrze, nie było ani jednego błędu. To po co je rozwiązywali? Czego na tej lekcji się nauczyli?* No właśnie. Bardzo lubimy takie lekcje. Tylko, że uczniowie niczego na nich się nie uczą, zatem – z punktu widzenia podstawowego zadania szkoły – jest to czas stracony.

Podczas rozwiązywania problemów jest taki stan, który przyjęto określać mianem *być w kropce*⁶. Jestem w kropce, tzn. nie wiem, co teraz mam zrobić, jaką dalszą drogę rozwiązania wybrać, jak pokonać powstałą trudność. W kropce bywają naukowcy, wynalazcy, ... wszyscy ludzie myślący. W takiej sytuacji naturalne jest testowanie różnych strategii, badanie różnych możliwych dróg, a w konsekwencji robienie błędów. **Alternatywą dla błędów jest poddanie się i rezygnacja z rozwiązania.**

Uczeń otrzymując zadanie ze strefy swojego najbliższego rozwoju często będzie w kropce. Powinien być w kropce, bo wynika to z natury tej strefy. Zatem, powinien robić błędy. W

⁶ Jedną z moich byłych studentek zwykła w takiej sytuacji używać bardziej współczesnego określenia: *zawiesiłam się*.

procesie uczenia się jest to normalne zjawisko, może nawet niezbędne, żeby proces ten faktycznie się toczył. Rzecz w tym, żeby błędy te odpowiednio wykorzystywać.

Najczęściej sami uczniowie potrafią, dzięki współpracy, zauważyć błędy, przeanalizować je i usunąć. Czasami może być potrzebna nasza interwencja, np. w postaci zachęty do ich samodzielnego odszukania i podjęcia próby usunięcia, niekiedy wsparcia ucznia w tym. Dzięki temu stworzymy atmosferę, w której uczniowie kolejne zadania będą traktowali jako próby, podczas których mogą robić błędy, szukać i wprowadzać poprawki, które doprowadzą ich ostatecznie do poprawnego rozwiązania – a więc będą się uczyć. I jest to podstawowy dydaktyczny walor błędów – są one okazją do tworzenia sytuacji do uczenia się na własnych błędach.

Słuchanie uczniowskich rozmów (opowiadań) o rozwiązywaniu zadań, o matematyce jest doskonałą okazją do wychwycenia pojawiających się błędów. Znalezienie ich przyczyny może mieć ogromne znaczenie dla matematycznego rozwoju ucznia, czy nawet wielu uczniów. Pojawienie się tego samego błędu u większej liczby uczniów może być sygnałem, że jego przyczyna leży nie w uczniach, lecz jest efektem metod stosowanych przez nauczyciela w procesie kształcenia. **Pozwólmy zatem uczniom na błędy – są one warunkiem uczenia się. I uczniowie, i my możemy czerpać z nich korzyści.**

Pamiętaliśmy o tych wskazówkach przygotowując scenariusze zajęć z zestawem pomocy *Gramy w piktogramy*. Przeprowadzone na etapie pilotażu pakietu badanie efektywności jego stosowania w klasie trzeciej szkoły podstawowej pokazało, że uczniowie pracujący z pakietem we wszystkich badanych obszarach matematycznych umiejętności, rozwinęli się bardziej niż ich koledzy z klas kontrolnych. Ich postęp przez ten rok był o 50% większy od postępu uczniów, którzy z pomocy nie korzystali i których nauczyciele nie zmodyfikowali w związku z tym swojego stylu pracy (por. Raport z testowania innowacyjnej pomocy dydaktycznej: Pakiet edukacyjny Gramy w piktogramy http://projekt-piktografia.pl/?page_id=814)

Warto pamiętać o tych zaleceniach w codziennej pracy.